Proceedings of the 5th International Scientific and Practical Conference «Society and Science: Interconnection»
(February 16-18, 2025).
Porto, Portugal

No 235

PHYSICS AND MATHS

Алгоритми оптимального керування інформаційними потоками в багатоканальних мережах марковського типу

Макушенко Ігор Анатолійович[1]

[1] кандидат фізико-матиматичних наук;
Київський національний університет імені Тараса Шевченка; Україна

Анотація. Для багатоканальної стохастичної мережі марковського типу розглянуто задачі оптимального керування напрямком вхідного потоку. При цьому вибір стратегії керування базується на таких показниках якості функціонування мережі, як середній прибуток від роботи всієї мережі та ризик досягнення певного прибутку. В явному вигляді, через параметри моделі знайдені цільові функції оптимізаційних задач і показано, що вони є лінійними відносно контрольованих параметрів.
Ключові слова: *мережа, оптимізаційна задача, вхідний потік, функціонал якості, процес обслуговування, інтегральне рівняння.*

Становлення теорії стохастичних мереж та її розвиток в значній мірі стимулювались практичними задачами з проектування та модернізації інформаційно-обчислювальних систем та мереж. Аналіз та синтез інформаційно-обчислювальних мереж, сучасних мереж мобільного зв'язку вимагає розв'язку оптимізаційних задач для стохастичних мереж. Загальну класифікацію типів постановок оптимізаційних задач і методів їх розв'язування дано у монографії Л. Клейнрока [1]. Головними є задачі розподілу інформаційних потоків, вибору пропускних спроможностей та топологічної структури мережі. Повнота розв'язку цих задач залежить від керуючих розподілів мережі, складності алгоритму маршрутизації та виду функцій вартості. Тема роботи пов'язана з проблемою оптимального поділу між вузлами мережі зовнішнього навантаження. Її можна віднести до згаданих вище оптимізаційних задач першого типу. В роботі для багатоканальних стохастичних мереж марковського типу розглянуто задачі оптимального керування напрямком вхідного потоку. При цьому вибір стратегії керування базується на таких показниках якості функціонування мережі як середній прибуток

This work is distributed under the terms of the Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International License (https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/).

від роботи всієї мережі та ризик досягнення певного прибутку. Основним результатом роботи є розробка ефективних алгоритмів оптимального керування інформаційними потоками в багатоканальних стохастичних мережах, які базуються на знаходженні явного виду цільових функцій оптимізаційних задач.

Розглянемо мережу обробки інформації, яка складається з $"r"$ однотипних вузлів обробки інформації. На вузли обробки інформації надходить один зовнішній загальний пуассонівський потік інформаційних пакетів $\nu(t)$ інтенсивності λ. Пакет, що надійшов на вхід мережі, з ймовірністю $h_i, \quad i=1,2,...,r \quad (h_i \geq 0, \sum_{i=1}^{r} h_i = 1)$ надходить для обробки в і-ий вузол, який представляє собою багатоканальну стохастичну систему. При надходженні пакету у таку систему зразу починається його обробка. Час обробки розподілений за показниковим законом з параметром μ_i для вузла $"i"$. Після завершення обробки в і-ому вузлі пакет з ймовірністю p_{ij} надходить для обробки в j-ий вузол та з ймовірністю $p_{ir+1} = 1 - \sum_{j=1}^{r} p_{ij}$ залишає мережу.

Зручно ввести $"r+1"$ вузол та інтерпрентувати його як вихід з мережі обробки інформації.

Матрицю $P = \|p_{ij}\|_1^r$ будемо називати матрицею маршрутизації мережі, а матрицю

$$\overline{P} = \begin{Vmatrix} & & & & p_{1r+1} \\ & & P & & p_{2r+1} \\ & & & & \dots \\ & & & & p_{rr+1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

– розширеною матрицею маршрутизації. Очевидно, що матриця $\overline{P}$ є стохастичною матрицею, а P – підстохастичною.

Мережі такого типу використовуються при моделюванні інформаційно-обчислювальних мереж та мереж зв'язку ([2] –

This work is distributed under the terms of the Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International License (https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/).

[4]). Для зручності посилань будемо позначати мережі такого типу через $[M|M|\infty]^r$.

Процесом обробки інформації у $[M|M|\infty]^r$ – мережі будемо називати вектор $X'(t)=(X_1(t),X_2(t),...,X_r(t))$, і-та компонента якого $X_i(t)$ приймає значення $0,1,...$ і дорівнює числу інформаційних пакетів, що знаходяться на обробці у і-ому вузлі у момент часу $t\geq 0$. У подальшому будемо вважати, що у початковий момент часу мережа порожня, тобто $X'(0)=(X_1(0),X_2(0),...,X_r(0))=(0,0,...,0)$.

На процесі X(t), $t\geq 0$ визначимо адитивний функціонал $S'(t)=(S_1(t),S_2(t),...,S_r(t))$, де $S_i(t)$, $i=1,2,...,r$ – число пакетів, обробка яких завершилася в і-ому вузлі за час t. Оскільки $S(t)$ визначає сумарний прибуток від роботи мережі на проміжку [0,t], то процес $S(t)$, $t\geq 0$ будемо називати процесом накопичення прибутку. Через $S(t,z)$, $z'=(z_1,z_2,...,z_r)$, $|z|\leq 1$ позначимо багатовимірну генератрису вектора $S(t)$.

Для аналізу оптимізаційних задач в класі $[M|M|\infty]^r$ – мереж важливим є наступний результат.

Теорема 1. Для генератриси $S(t,z)$ справедливе подання

$$S(t,z)=\exp\{-\lambda\sum_{i=1}^{r}h_i\int_0^t[1-\varphi_i(u,z)]du\},$$

де генератриси $\varphi_i(t,z)$, $i=1,2,...,r$ є єдиним розв'язком системи інтегральних рівнянь

$$\varphi_i(t,z)=e^{-\mu_i t}+z_i\mu_i\int_0^t[\sum_{j=1}^{r}p_{ij}\varphi_j(t-u,z)+p_{ir+1}]\times e^{-\mu_i u}du,$$

$i=1,2,...,r$.

Доведення теореми базується на моделюванні роботи мережі гіллястим процесом Беллмана-Харріса ([5])) з $2r+1$ типами частинок $T_0,T_1,...,T_r,T_{r+1},...,T_{2r}$. Кожна з частинок типу T_i має

This work is distributed under the terms of the Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International License (https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/).

випадкову тривалість життя τ^i з функцією розподілу $P\{\tau^i \le t\} = G^i(t)$, причому

$$G^0(t) = 1 - e^{-\lambda t},\ t \ge 0,\ G^i(t) = 1 - e^{-\mu_i t},\ t \ge 0,\ i = 1,2,...,r, \quad (1)$$

$$G^i(t) = \begin{cases} 0, & t < 1, \\ 1, & t \ge 1, \end{cases} \quad i = r+1,...,2r. \quad (2)$$

У кінці свого життя частинка типу T_i перетворюється у сукупність частинок $(\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_r, \alpha_{r+1}, ..., \alpha_{2r+1})$ типів $T_0, T_1, ..., T_r, T_{r+1}, ..., T_{2r+1}$ нульового віку, які будемо називати безпосередніми нащадками. Генератриси безпосередніх нащадків однієї частинки типу T_i мають вигляд

$$f^0(z) = z_0 \sum_{j=1}^{r} z_j h_j, \quad (3)$$

$$f^i(z) = z_{r+i}\left(\sum_{j=1}^{r} p_{ij} z_j + p_{ir+1}\right), \quad i = 1,2,...,r, \quad (4)$$

$$f^i(z) = z_i, \quad i = r+1,...,2r. \quad (5)$$

Співвідношення (1) – (5) повністю задають процес Беллмана-Харріса.

Якщо існують границі $\lim_{t\to\infty} t^{-1} MS_i(t)$, то будемо позначати їх через m_i, $i = 1,2,...,r$. Очевидно, що m_i залежить від параметрів $[M|M|\infty]^r$ – мережі: $h' = (h_1, h_2, ..., h_r)$, λ, $\mu' = (\mu_1, \mu_2, ..., \mu_r)$, $P = \|p_{ij}\|_1^r$. У подальшому будемо вважати, що λ, μ, P є заданими, а вибір вектора h знаходиться в нашому розпорядженні. Таким чином $m_i = m_i(h)$, $i = 1,2,...,r$. Аналогічно, якщо існують границі

This work is distributed under the terms of the Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International License (https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/).

$\lim_{t\to\infty} t^{-1}\mathrm{cov}(S_i(t),S_j(t))$, то будемо позначати їх через $V_{ij}=V_{ij}(h),\ \ i,j=1,2,...,r$.

Нехай C_i, $i=1,2,...,r$ - прибуток від обробки одного пакету в і-ому вузлі. Тоді важливе значення має наступна задача

$$M(h)=\sum_{i=1}^{r}C_i m_i(h)\to\max, \tag{6}$$

при умові

$$h_1+h_2+...+h_r=1,\ \ h_i\ge 0,\ \ i=1,2,...,r. \tag{7}$$

Розв'язок $h^{+'}=(h_1^+,h_2^+,...,h_r^+)$ задачі (6), (7) представляє собою таке управління вхідним потоком, яке максимізує середній прибуток від роботи всієї мережі.

Очевидно, що $V(h)=\sum_{i,j=1}^{r}C_i V_{ij}(h)C_j$ - величина ризику, міра відхилення прибутку від очікуваного значення $M(h)=\sum_{i=1}^{r}C_i m_i(h)$ Враховуючи це, ми приходимо до оптимізаційної задачі виду

$$V(h)=\sum_{i,j=1}^{r}C_i V_{ij}(h)C_j\to\min, \tag{8}$$

при умові

$$M(h)=\sum_{i=1}^{r}C_i m_i(h)=M_0, \tag{9}$$

$$h_1+h_2+...+h_r=1,\ \ h_i\ge 0,\ \ i=1,2,...,r, \tag{10}$$

де $M^-\le M_0\le M^+=M(h^+)$ *- задана величина середнього*

This work is distributed under the terms of the Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International License (https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/).

прибутку, M^- *– мінімальне значення функціоналу* $M(h)$ *при обмеженнях (7).*

Пріоритетність оптимізаційних задач (6), (7) і (8) – (10) залежить від мети управління стохастичною мережею. Подібні постановки часто виникають при оцінюванні прибутку і ризику при фінансових операціях ([6]).

Для того, щоб розв'язати оптимізаційні задачі (6), (7) і (8) – (10), необхідно подати функціонали $M(h), V(h)$ через параметри $[M|M|\infty]^r$ – мережі. Для цих цілей служить наступна теорема.

Теорема 2. В класі стохастичних мереж типу $[M|M|\infty]^r$ при умові, що спектральний радіус матриці маршрутизації P строго менший 1, задачі максимізації прибутку та мінімізації ризику є задачами лінійного програмування, для яких цільові функції мають вид

$$M(h) = \lambda h' A C, \tag{11}$$

$$\begin{aligned} V(h) = \lambda \sum_{\alpha,\beta=1}^{r} C_\alpha \{ \delta_{\alpha\beta} \sum_{i=1}^{r} h_i A_\alpha^i + \\ + h'[(I-P)^{-1} I_\alpha P (I-P)^{-1} e_\beta + \\ + (I-P)^{-1} I_\beta P (I-P)^{-1} e_\alpha]\} C_\beta, \end{aligned} \tag{12}$$

де $A = \left\| A_\alpha^i \right\|_1^r = (I-P)^{-1}, \quad C' = (C_1, C_2, ..., C_r)$, $I = \left\| \delta_{ij} \right\|_1^r$ *– одинична матриця,* $e_\alpha, \ \alpha = 1,2,...,r$ *– r-вимірний вектор, у якого компонента з номером* α *дорівнює 1, а інші дорівнюють 0;* $I_\alpha = \left\| \delta_{ij} \delta_{i\alpha} \right\|_{i,j=1}^r, \ \alpha = 1,2,...,r$ *– матриця розміром* $r \times r$*, у якій діагональний елемент з номером* α *дорівнює 1, а інші елементи дорівнюють 0.*

З теореми 2. можна зробити такий висновок. Оптимізаційні задачі на максимум середнього прибутку і мінімум ризику є

This work is distributed under the terms of the Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International License (https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/).

задачами лінійного програмування, які можуть бути розв'язані стандартними методами. Відповідні функціонали задаються співвідношеннями (11), (12).

Результати роботи можуть знайти застосування у розв'язанні сучасних практичних задач, пов'язаних з оптимальним керуванням складними технологічними процесами, оптимальним розподілом пацієнтів між лікарнями, вибором оптимальної структури інформаційних потоків у мережах мобільного зв'язку та інформаційно-обчислювальних системах та мережах.

References:

[1] L. Kleinrock . Queueing Systems, Volume II: Computer Applications. Wiley, New York, (1976).
[2] Massey W.A. and Whitt W. Networks of infinite-server queues with nonstationary Poisson input / Queueing systems. – 1993. – N 13. – P. 183-250.
[3] Лебєдєв Є.О., Макушенко І.А. Оптимальний розподіл зовнішнього навантаженнядля багатоканальних стохастичних мереж: Навчальний посібник. – К.: НБУВ, 2012. – 90 с.
[4] Lebedev E.A., Makushenko *I.A.* Profit maximization and risk minimization in semi-Markovian networks / Cybernetics and Systems Analysis. – 2007. – № 2. – P. 65-79.
[5] Vatutin *V.A.* The critical Bellman-Harris branching processes with immigration and several types of particles. Probability theory and its applications. - 1976. - V. 21, № 2. - S. 447-454.
[6] Коваль Р.Я., Наконечний О.М. Оптимізація ризику дивидентної політики // Доповіді НАН України. – 2001. – № 12. – С. 58-62.

This work is distributed under the terms of the Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International License (https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/).